

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG III

77. a) $1 < a_n < 2$. Vậy $[a_n] = 1$.

b) $2 \leq a_n < 3$. Vậy $[a_n] = 2$.

c) ta thấy: $44^2 = 1936 < 1996 < 2025 = 45^2$, còn $46^2 = 2116$.

$$a_1 = \sqrt{1996} \Rightarrow 44 < a < 45.$$

Hãy chứng tỏ với $n \geq 2$ thì $45 < a_n < 46$.

Như vậy với $n = 1$ thì $[a_n] = 44$, với $n \geq 2$ thì $[a_n] = 45$.

78. Cần tìm số tự nhiên B sao cho $B \leq A < B + 1$.

Làm giảm và làm trội A để được hai số tự nhiên liên tiếp.

Ta có:

$$(4n + 1)^2 < 16n^2 + 8n + 3 < (4n + 2)^2.$$

Lấy căn bậc hai: $4n + 1 < \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n + 2$.

Thêm $4n^2$ vào:

$$4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < 4n^2 + 4n + 2 < 4n^2 + 8n + 4$$

hay

$$(2n + 1)^2 < 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < (2n + 2)^2.$$

Lấy căn bậc hai: $2n + 1 < A < 2n + 2$.

Vậy $[A] = 2n + 1$.

79. Biến đổi $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^{250} = (5 + 2\sqrt{6})^{125}$.

Phần nguyên của nó có chữ số tận cùng là 9.

80. Từ đầu bài ta có $\{x\}$ là số nguyên.

Ta lại có $0 \leq \{x\} < 1$ nên $\{x\} = 0$.

Suy ra x là số nguyên.

Do đó $[x^2] = x^2$, $[x] = x$.

Phương trình đã cho trở thành: $x^2 + x = 2$.

Đáp số: $x = 1$, $x = -2$.

81. Đặt $y = \left[\frac{x}{2} \right] \in \mathbb{Z}$.

Giải phương trình $3y^2 + 5y - 2 = 0$ được $y = -2$, $y = \frac{1}{3}$ (loại).

$$\left[\frac{x}{2} \right] = -2 \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \Rightarrow -4 \leq x < -2.$$

82. Cộng từng vế các phương trình đã cho: $x + y + z = 3,3$.

Từ hai phương trình đầu: $x + y + [z] + \{z\} + [y] + \{x\} = 3,3$.

Suy ra $[y] + \{x\} = 0$ (chú ý là $[z] + \{z\} = z$).

Do đó $\{x\}$ là số nguyên nên $\{x\} = 0$.

Vậy $[y] = 0$ và $x = [x]$.

Từ $x + [y] + \{z\} = 1,1$, do $[y] = 0$ suy ra $x + \{z\} = 1,1$.

Do $0 \leq \{z\} < 1$ và $x = [x]$ nên $x = 1$, do đó $\{z\} = 0,1$.

Từ $y + [z] + \{x\} = 2,2$, do $\{x\} = 0$ nên $y + [z] = 2,2$.

Ta lại có $[y] = 0$ nên $0 \leq y < 1$, do đó $y = 0,2$, $[z] = 2$.

Vậy $z = [z] + \{z\} = 2,1$.

Đáp số: $x = 1$, $y = 0,2$, $z = 2,1$.

83. Nếu $0 \leq x - [x] < \frac{1}{2}$ thì $0 \leq 2x - 2[x] < 1$ nên $[2x] = 2[x]$.

Nếu $\frac{1}{2} \leq x - [x] < 1$ thì $1 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow 0 \leq 2x - (2[x] + 1) < 1 \Rightarrow [2x] = 2[x] + 1$.

84.

$$A = \left(\left[\sqrt{1} \right] + \left[\sqrt{2} \right] + \left[\sqrt{3} \right] \right) + \left(\left[\sqrt{4} \right] + \dots + \left[\sqrt{8} \right] \right) + \left(\left[\sqrt{9} \right] + \dots + \left[\sqrt{15} \right] \right) + \left(\left[\sqrt{16} \right] + \dots + \left[\sqrt{24} \right] \right).$$

Theo cách chia nhóm như trên, nhóm 1 có 3 số, nhóm 2 có 5 số, nhóm 3 có 7 số, nhóm 4 có 9 số.

Các số thuộc nhóm 1 bằng 1, các số thuộc nhóm 2 bằng 2, các số thuộc nhóm 3 bằng 3, các số thuộc nhóm 4 bằng 4. Vậy $A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + 4.9 = 70$.

Chú ý. Trường hợp tổng quát cần tính tổng

$A = 1.3 + 2.5 + 3.7 + \dots + n(2n+1)$, ta tính như sau:

$$\begin{aligned} A &= (2.1^2 + 1) + (2.2^2 + 2) + (2.3^2 + 3) + \dots + (2n^2 + n) \\ &= 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n). \end{aligned}$$

Sau đó áp dụng công thức:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}; \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

85. Ta sẽ chứng minh tồn tại các số tự nhiên m, p sao cho $\underbrace{9600\dots0}_m \leq a + 15p < \underbrace{9700\dots0}_m$, tức là

$$96 \leq \frac{a}{10^m} + \frac{15p}{10^n} < 97 \quad (1)$$

$$\text{Gọi } a + 15 \text{ là số có } k \text{ chữ số: } 10^{k-1} \leq a + 15 < 10^k \Rightarrow \frac{1}{10} \leq \frac{a}{10^k} + \frac{15}{10^k} < 1 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } x_n = \frac{a}{10^k} + \frac{15n}{10^k}. \text{ Theo (2) ta có } x_1 < 1 \text{ và } \frac{15}{10^k} < 1.$$

Cho n nhận lần lượt các giá trị 2, 3, 4,... các giá trị của x_n tăng dần, mỗi lần tăng không quá 1 đơn vị, khi đó $[x_n]$ sẽ trải qua các giá trị 1, 2, 3,... Đến một lúc nào đó ta có $[x_p] = 96$. Khi đó

$$96 \leq x_p < 97 \text{ tức là } 96 \leq \frac{a}{10^m} + \frac{15p}{10^n} < 97.$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh.

86. a) $n = 1998 = 2.3^3.37$, do đó

$$\tau(n) = 2.4.2 = 16;$$

$$\sigma(n) = \frac{2^2-1}{2-1} \cdot \frac{3^4-1}{3-1} \cdot \frac{37^2-1}{37-1} = 3.40.38 = 4560.$$

b) $n = 2000 = 2^4.5^3$, do đó

$$\tau(n) = 5.4 = 20;$$

$$\sigma(n) = \frac{3^5-1}{3-1} \cdot \frac{5^4-1}{5-1} = 31.156 = 4836.$$

87. Nếu $n = p$ nguyên tố thì $\sigma(n) = \frac{p^2-1}{p-1} = p+1 = n+1$.

Ta chứng minh điều ngược lại bằng phản chứng.

Giả sử $\sigma(n) = n+1$ và n là hợp số, có dạng phân tích tiêu chuẩn

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad k > 1, \alpha_i \geq 1 (i = 1, 2, \dots, k).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1} \\ &= (p_1^{\alpha_1} + \dots + p_1 + 1) \cdot (p_2^{\alpha_2} + \dots + p_2 + 1) \dots (p_k^{\alpha_k} + \dots + p_k + 1) \\ &\geq (p_1^{\alpha_1} + 1) \cdot (p_2^{\alpha_2} + 1) \dots (p_k^{\alpha_k} + 1) \geq p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} + 1 = n + 1 \end{aligned}$$

trái với giả thiết.

Vậy n là nguyên tố.

88. Nếu $m = p^\alpha q^\beta$ thì $m^2 = p^{2\alpha} q^{2\beta}$ nên

$$15 = \tau(m^2) = (2\alpha + 1)(2\beta + 1) = 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1$$

$$\Rightarrow 2\alpha\beta + \alpha + \beta = 7 \Rightarrow 2\alpha\beta = 7 - (\alpha + \beta) \leq 5.$$

Từ đó suy ra $\alpha = 1, \beta = 2$ (α, β không thể cùng bằng 1, vì khi đó $2\alpha\beta + \alpha + \beta = 4$).

Vậy

$$\tau(m^3) = (3\alpha + 1)(3\beta + 1) = 4 \cdot 7 = 28.$$

89. Với $n = 2^\alpha 3^\beta$ ta có

$$\sigma(n) = \frac{2^{\alpha+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{\beta+1} - 1}{3 - 1} = 403 = 13 \cdot 31.$$

Do tính duy nhất của dạng phân tích tiêu chuẩn ta có:

$$\begin{cases} 2^{\alpha+1} - 1 = 31 \\ \frac{3^{\beta+1} - 1}{3 - 1} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\alpha+1} = 32 \\ 3^{\beta+1} = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{\alpha+1} - 1 = 13 \\ \frac{3^{\beta+1} - 1}{3 - 1} = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\alpha+1} = 14 \\ 3^{\beta+1} = 63 \end{cases} \text{ Vô nghiệm.}$$

Vậy $n = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

90. Với $n = 3p^2$ ta có

$$\sigma(n) = \frac{3^2 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{p^3 - 1}{p - 1} = 124 \Rightarrow p^2 + p + 1 = 31 \Rightarrow p = 5; p = -6 \text{ (loại)}.$$

Vậy $n = 3 \cdot 5^2 = 75$.

91. Với $n = 2^4 \cdot p$ ta có

$$\sigma(n) = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{p^2 - 1}{p - 1} = 31(p + 1).$$

Do n là số hoàn chỉnh nên

$$31(p + 1) = 2n = 32p \Rightarrow p = 31, n = 496.$$

92. $\sigma(n) = \sigma(pq) = (p + 1)(q + 1) = 2pq$.

Trong hai số nguyên tố p, q phải có ít nhất một số lẻ, chẳng hạn q .

Khi đó

$$pq = (p + 1) \frac{q + 1}{2}.$$

Do tính duy nhất của sự phân tích tiêu chuẩn suy ra

$$\begin{cases} q = p + 1 \\ p = \frac{q + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 3 \end{cases}.$$

Vậy $n = 6$.

93. $\sigma(p^2 q) = \frac{p^3 - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^2 - 1}{q - 1} = (p^2 + p + 1)(q + 1) = 2p^2 q$

$$\Rightarrow p^2 + p + 1 = q(p^2 - p - 1) \Rightarrow q = \frac{p^2 + p + 1}{p^2 - p - 1} = 1 + \frac{2(p + 1)}{p^2 - p - 1}.$$

Do $p^2 - p - 1 = (p - 2)(p + 1) + 1$ nên $(p^2 - p - 1, p + 1) = 1$.

Từ đó $p^2 - p - 1$ phải là ước của 2.

Nếu $p^2 - p - 1 = 1$ thì $p = 2$, và do đó $q = 7$.

Nếu $p^2 - p - 1 = 2$ phương trình vô nghiệm đối với p .

Vậy $n = 2^2 \cdot 7 = 28$.

94. Giả sử có số hoàn chỉnh $n = p^\alpha, \alpha \geq 1$.

Khi đó

$$\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} = 2p^\alpha$$

hay

$$p^\alpha + \dots + p + 1 = 2p^\alpha$$

về phải chia hết cho p , còn về trái không chia hết cho p nên đẳng thức trên là vô lý.

Vậy không có số hoàn chỉnh $n = p^\alpha$.

95. Đặt $m = 2^x \cdot 3^y$ và $n = 2^u \cdot 3^v$.

Theo giả thiết ta có $(2^x \cdot 3^y, 2^u \cdot 3^v) = 18 = 2 \cdot 3^2$.

Từ đó suy ra $\min(x, u) = 1, \min(y, v) = 2$.

Mặt khác

$$\begin{cases} \tau(m) = 21 \\ \tau(n) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y+1) = 21 \\ (u+1)(v+1) = 10 \end{cases}.$$

$$\min(x, u) = 1 \Rightarrow u \geq 1 \Rightarrow u + 1 \geq 2, \min(y, v) = 2 \Rightarrow v \geq 2 \Rightarrow v + 1 \geq 3.$$

Suy ra

$$\begin{cases} u + 1 = 2 \\ v + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 4 \end{cases}.$$

Do $v = 4$ nên $y = \min(y, v) = 2$.

$$\text{Từ đó } x + 1 = \frac{21}{y+1} = \frac{21}{3} = 7 \Rightarrow x = 6.$$

$$\text{Vậy } m = 2^6 \cdot 3^2 = 576, n = 2^1 \cdot 3^4 = 162.$$

96. Giả sử $n = p^3 q$ là số hoàn chỉnh, ta có

$$\sigma(n) = 2n,$$

hay

$$\frac{p^4 - 1}{p - 1} (q + 1) = 2p^3 q \Rightarrow q = 1 + \frac{2(p^2 + p + 1)}{p^3 - p^2 - p - 1}.$$

$$\text{Ta có } p^3 - p^2 - p - 1 = (p - 2)(p^2 + p + 1) + 1$$

$$\Rightarrow (p^2 + p + 1, p^3 - p^2 - p - 1) = (p^2 + p + 1, 1) = 1.$$

Như vậy phân số $\frac{p^2 + p + 1}{p^3 - p^2 - p - 1}$ là tối giản.

Vậy q nguyên trong các trường hợp sau:

$$p^3 - p^2 - p - 1 = 1 \Rightarrow (p - 2)(p^2 + p + 1) = 0 \Rightarrow p = 2.$$

Khi đó $q = 15$, không là số nguyên tố.

$$p^3 - p^2 - p - 1 = 2 \Rightarrow (p - 2)(p^2 + p + 1) = 1.$$

Điều này không xảy ra do $p^2 + p + 1 > 1$.

Vậy không tồn tại số hoàn chỉnh dạng $p^3 q$.

97. a) và b) suy trực tiếp từ định nghĩa $v_p(n)$.

c) Ta có $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Xét tập hợp $A = \{1, 2, \dots, n\}$.

Trong A ta có các phần tử chia hết cho p là $p, 2p, \dots, \left[\frac{n}{p}\right]p$, suy ra số phần tử chia hết cho p

$$\text{là } \left[\frac{n}{p}\right].$$

Tương tự, số phần tử chia hết cho p^2 là $\left[\frac{n}{p^2}\right], \dots$, số phần tử chia hết cho p^k là $\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

Vì n là hữu hạn nên $\exists k_0$ để $p^{k_0} > n$, do đó $\left[\frac{n}{p^k} \right] = 0, \forall k > k_0$. Do số chia hết cho p^2 đồng thời cũng chia hết cho p , số chia hết cho p^k đồng thời chia hết cho p, p^2, \dots, p^{k-1} , nên số mũ trong sự phân tích tiêu chuẩn của $n! = 1.2 \dots n$ là $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k} \right]$. Do nhận xét trên tổng này là hữu hạn.

98. a) Vì $2^p - 1$ là số nguyên tố nên

$$E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

có các ước là

$$2^k \text{ và } 2^k(2^p - 1) \text{ với } 0 \leq k \leq p - 1.$$

Do đó tổng của tất cả các ước này là:

$$\begin{aligned} \sigma(E_p) &= \frac{2^{p-1+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{(2^p - 1)^{1+1} - 1}{(2^p - 1) - 1} \\ &= (2^p - 1) \cdot \frac{(2^p - 1)^2 - 1}{(2^p - 1) - 1} \\ &= (2^p - 1) \cdot 2^p \\ &= 2E_p \end{aligned}$$

Vậy E_p là số hoàn chỉnh. Ta có $E_2 = 6; E_3 = 28, E_5 = 496$.

b) Giả sử n là một số hoàn chỉnh chẵn, n có dạng $n = 2^a \cdot b$ với $a \geq 1$ và b lẻ.

Ta có $\sigma(n) = \sigma(2^a) \sigma(b) = (2^{a+1} - 1) \sigma(b)$.

Do n hoàn chỉnh nên $2n = 2^{a+1} \cdot b = \sigma(n) = (2^{a+1} - 1) \sigma(b)$.

Vì 2^{a+1} nguyên tố cùng nhau với $2^{a+1} - 1$ nên $2^{a+1} - 1$ là ước của b , do đó tồn tại số nguyên dương c để $b = (2^{a+1} - 1)c$ và vì vậy $\sigma(b) = 2^{a+1} \cdot c$.

Nếu $c > 1$ thì b có ít nhất 3 ước là $c, (2^{a+1} - 1)c$ và 1 .

Ba ước này có tổng là $2^{a+1} \cdot c + 1 > 2^{a+1} \cdot c = \sigma(b)$. Điều này là vô lý.

Vậy $c = 1$ và vì vậy $b = 2^{a+1} - 1$. Số b có 2 ước là $2^{a+1} - 1$ và 1 .

Hai ước này có tổng là $2^{a+1} = \sigma(b)$, do đó b không có ước nào khác và vì vậy b là số nguyên tố.

Cuối cùng, đặt $p = a + 1$, vậy thì $2^p - 1$ là số nguyên tố.

Ta chứng minh p nguyên tố.

Thật vậy, nếu $p = uv$ với $u > 1, v > 1$ thì

$$2^p - 1 = 2^{uv} - 1 = (2^u)^v - 1 = (2^u - 1)[(2^u)^{v-1} + \dots + 2^u + 1]$$

là hợp số.

Vậy n có dạng $E_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$ với p là số nguyên tố sao cho $2^p - 1$ nguyên tố.